1011. [Articolo di ricerca – Autore unico / Artículo de investigación – Único autor / Research article – Single author] (Ritardo – Retraso - Delay).
D'Amore, B. (2021). Investigar en Educación matemática: una responsabilidad de los matemáticos. Memorias del II Simposio de Educación Matematica Virtual – II SEM-V, mayo 2021, Tomo 1 (Ed. Jorge Sagula). Pp. 7-16. Luján, Argentina: Universidad de Luján.

Investigar en Educación matemática: una responsabilidad de los matemáticos

Bruno D'Amore
PhD in Mathematics Education
PhD honoris causa University of Cyprus
NRD, Department of Mathematics, University of Bologna, Italy
Doctorado Interinstitucional en Educación, énfasis matemático, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia

Resumen. En algunos países todavía se mantiene una especie de aversión hacia la investigación en Educación Matemática. Algunos matemáticos no aprecian su contenido, considerándolo más apropiado para pedagogos o psicólogos. En este texto, el autor ofrece algunos ejemplos de investigación que muestran que una investigación seria en E. M. debe ser necesariamente realizada por matemáticos.
Palabras clave: dificultad en el aprendizaje de la matemática, límite, demostración, área y perímetro.

Abstract. In some countries a kind of aversion towards research in Mathematics Education still remains. Some mathematicians do not appreciate its content, considering it more appropriate to pedagogists or psychologists. In this lecture, the author offers some examples of research showing that a serious research in M. E. must necessarily be done by mathematicians.
Keywords: difficulty in the learning of mathematics, limit, demonstration, area and perimeter.

1. El límite: uno de los conceptos clave de la Matemática; uno de los obstáculos más comunes en el aprendizaje de la Matemática

Creo que todos nosotros docentes de Matemática antes o después hemos tenido que enfrentarnos a la enseñanza del límite; y para esto presentamos esta elegante definición formal:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

para darnos cuenta inmediatamente después que el conjunto de los alumnos que la había entendido *tiende* al vacío …
A este punto intentamos dar una explicación eliminando algo del formalismo, por ejemplo, con una frase del tipo, un poco más larga, pero expresada en lenguaje natural:
«l es el límite de $f(x)$ para x que tiende a x_0 si para todo número real ε>0 existe un número real positivo δ tal que, si $0< |x - x_0| < \delta$, entonces $|f(x) - l| < \varepsilon$»
En la mayoría de los casos, nos damos cuenta que el conjunto de estudiantes que manifiesta entender esta definición no aumenta gran cosa su cardinalidad.

Y es entonces cuando metemos en campo todos nuestros conocimientos… narrativos, eliminando el formalismo y describiendo con palabras lo que sucede cuando hablamos de límite.

«Sea dada una función f : X → R definida en un subconjunto X de R y un punto de acumulación x_0 de X. Un número real l es el límite de $f(x)$ para x que tiende a x_0 si, fijado arbitrariamente un valor ε de la distancia entre $f(x)$ y l, se encuentra, en correspondencia de este, un valor δ de la distancia entre x y x_0 para el cual por todos los x, excluido x_0, que distan de x_0 menos de δ, se tiene que $f(x)$ dista de l menos de ε».

No obstante nuestros generosos esfuerzos, parece que este misterioso objeto matemático queda siempre tal, misterioso; la Didáctica de la matemática (que aquí traduciremos Educación matemática), aquella estudiada y estructurada por los matemáticos, ha sugerido varias hipótesis para explicar esta evidente dificultad, comprobadas por investigaciones de prestigio, por ejemplo la existencia de una fuerte contraposición entre el infinito actual y la presencia de un infinito potencial: "punto de acumulación" es infinito actual, "que tiende a" es infinito potencial. Hay varios estudios sobre esta gran dificultad, investigaciones hechas por matemáticos.

Otros ejemplos de obstáculos y misconcepciones relativos al aprendizaje del infinito:

a) Confusión entre términos considerados por muchos equisignificantes al *apeiron* griego: ilimitado, indefinido, infinito.

b) El infinito interpretado como número grande.

c) Las investigaciones de Arrigo y D'Amore (Arrigo & D'Amore, 1998, 1999, 2004) muestran que están radicadas profundamente en los estudiantes dos concepciones que deben eliminadas lo más pronto posible:

aplastamiento: todos los conjuntos infinitos tienen la misma cardinalidad;

dependencia: el cardinal de un conjunto infinito depende de su extensión; por ejemplo, si se tienen dos segmentos de diferente medida, el segmento de mayor medida tiene más puntos.

d) Se lee en un libro: «Un conjunto se dice infinito cuando contiene infinitos elementos».

Mejor no hacemos comentarios; ciertamente, libros así no ayudan mucho

Es obvio que solo un matemático puede entender esto tipo de problemas didácticos.

2. La suma de competencias sobre argumentos específicos no garantiza la competencia sobre los argumentos que son la suma de estos

Cuando nos acercamos a la historia de la Matemática, una de las cuestiones que más sorprende es el contenido de una célebre y extraordinaria carta de Georg Cantor (1845-1918) a Richard Dedekind (1831-1916), enviada desde Halle el 29 de junio de 1877.

Dado que Dedekind se retrasaba (!) en dar respuesta a un problema que le había propuesto el 25 de junio, Cantor, después de sólo 4 días, y pidiendo disculpas por el proprio *celo,* propone con fuerza, en la carta del 29 de junio, una nueva interrogación, declarando tener *necesidad* de recibir la opinión de Dedekind.

Casi al inicio de esta nueva carta (en alemán), Cantor escribe (en francés) la famosa frase:

«Mientras que usted no lo apruebe, yo no puedo más que decir: lo veo, pero no lo creo».

Sobre este punto véase (Arrigo & D'Amore, 1992). [Para conocer los textos completos de las cartas intercambiadas entre los dos formidables matemáticos alemanes, se puede ver (Noether & Cavaillès, 1937) y (Cavaillès, 1962)].

Espontáneamente surge la siguiente pregunta: ¿cuál sería el argumento sobre el cual Cantor solicitaba una rápida respuesta de Dedekind? Nos lo dice el mismo Cantor en su carta del 25 de junio: «Una variedad continua de p dimensiones, con $p>1$, ¿se puede poner en relación unívoca con una variedad continua de dimensión uno, de manera tal que a un punto de una corresponda uno y sólo un punto de la otra?».
Debemos decir inmediatamente que, en aquella época, se entendía por "relación unívoca" lo que hoy llamamos "correspondencia biunívoca".
Para que nos puedan entender estudiantes o docentes no especialistas nos podemos concentrar en el siguiente caso, particular, pero igualmente significativo:
¿es posible hallar una correspondencia biunívoca entre los puntos de un cuadrado y los puntos de un segmento? (¿por ejemplo, de un lado del mismo segmento?)
Por "cuadrado" entendemos, de ahora en adelante, una superficie plana con forma cuadrada *abierta,* es decir sin borde. De ahora en adelante, hablaremos de segmento *abierto*, es decir sin los extremos.
Se puede intuir la importancia de la pregunta a partir del siguiente comentario del mismo Cantor:
«La mayor parte de aquellos a quienes les he planteado esta pregunta se han sorprendido del hecho mismo de que yo la planteara, ya que es evidente que, para la determinación de un punto sobre una extensión de p dimensiones, se necesitan siempre p coordenadas independientes».
Cantor confesó a Dedekind que había intentado demostrar esta imposibilidad, suponiéndola verdadera, obvia, pero sólo ¡porque ya no estaba satisfecho de la supuesta y tan difundida *evidencia*!
Confiesa por lo tanto haber formado parte *siempre* de aquéllos que no ponían en duda tal hecho; *siempre* … hasta que demostró que las cosas no estaban así.
La demostración hallada por Cantor es de una simplicidad genial; para verla, basta consultar un buen libro de Análisis o Cálculo, por ejemplo, Bourbaki (1970, pp. 47-49).
Nosotros aquí nos inspiramos en una célebre vulgarización de la demostración de Cantor que se halla en Courant y Robbins (1941) relativa sólo al ejemplo visto líneas arriba.
Pongamos el cuadrado en un sistema de ejes cartesianos ortogonales de origen O, de manera tal que dos lados consecutivos se "apoyen" sobre los ejes (obviamente uno de los vértices coincide entonces con el origen). Considerando el lado del cuadrado como unidad de medida, se tiene inmediatamente que cada punto P interno a la superficie cuadrada tiene coordenadas reales x_P y y_P del tipo $0 < x_P < 1$, $0 < y_P < 1$, por lo tanto, explícitamente: $x_P = 0.a_1a_2...a_n...$, y $y_P = 0.b_1b_2...b_n...$ A cada pareja ordenada de números reales (x_P, y_P) hacemos corresponder el número real $x_{P'}$ definido de la siguiente manera: $x_{P'} = 0.a_1b_1a_2b_2...a_nb_n...$, obtenido anteponiendo 0 y el punto decimal, y alternando después las cifras decimales singulares de cada coordenada. Se puede fácilmente constatar que $0 < x_{P'} < 1$ y, como tal, $x_{P'}$ se define de manera univoca a partir de x_P y y_P; como $x_{P'}$ se puede considerar como abscisa de un punto P' en el eje x [P'($x_{P'}$,0)], se puede pensar, por lo tanto, P', como *el* correspondiente de P en la correspondencia definida.
Viceversa: se puede partir de P' y de su abscisa y, con el método inverso de distribución de las cifras, llegar unívocamente a P.

Por lo tanto, hemos probado este teorema de Cantor, al menos en el caso en el cual la dimensión p de la variedad vale 2: a los puntos internos del cuadrado unitario corresponden de manera biunívoca los puntos internos del segmento unitario.[1]

Nuestra investigación tiene motivaciones puramente didácticas y los párrafos anteriores tienen sólo el objetivo de situarla en el ámbito histórico.

Quisimos recordar lo anterior, sólo para justificar el título de nuestra investigación: *Lo veo, pero no lo creo*, la célebre frase de Cantor, que vuelve tan humana toda la historia de esta demostración; para nosotros esta frase es emblemática de aquello que podría decir también un estudiante de los años finales (grados 12 y 13) de la escuela secundaria superior (en Italia y Suiza: estudiantes entre 17 y 19 años), que tuviera que ver con la demostración tratada por Courant y Robbins (1941), e ilustrada por nosotros.

Argumentos de base necesarios para la demonstración:

ejes cartesianos ortogonales monométricos

pareja ordenada $(x_P; y_P)$ de números reales como coordenadas de un punto P

números reales x_P

escritura formal $0<x_P<1$

Pasa un hecho curioso e interesante:

también si el estudiante demuestra conocer estos argumentos de base, NO entiende la demostración (85-90%) que se basa sobre estos hechos.

Esta situación la consideramos un tema que exige una fuerte reflexión de carácter didáctico que solo un matemático de profesión puede llevar a cabo.

3. La demostración nyaya

La escuela hindú nyaya (-II sec. – VII sec.) afirmaba la hegemonía de cuatro "medios de conocimiento" (pramana):

el testimonio

la analogía

la percepción

la inferencia

que examinaré en detalle.

El testimonio (sabda) comprende todo aquello que es digno de fe ya sea escrito o transmitido oralmente. Forman parte de éste las oraciones, las revelaciones divinas, la historia transmitida, los poemas sagrados.

La analogía (upamana; hay quien la traduce "comparación" y quien "equivalencia") es la forma de razonamiento que lleva a una definición del objeto sobre la base de las semejanzas con otros. Nótese que la analogía nyaya clasifica los objetos en categorías o clases de analogías, distinguiendo dos clases entre ellas basadas en el hecho de que no tienen términos análogos. Ahora, dado que la analogía entre objetos existentes se debe a consideraciones relativas al objeto (y por tanto no abstractas, sino clasificables y experimentales), esta forma de conocimiento no puede dejar de llamar nuestra atención sobre algunas de las concepciones actuales, incluso en Matemática. Pensamos, por ejemplo, en geometría a las definiciones por género próximo y diferencia específica; o, aún más elocuente, a las definiciones llamadas

[1] Podemos discutir sobre banales detalles en esta demostración, por ejemplo, prohibir el uso de los números reales escritos con 9 periódico; pero, para nuestro objetivo, podemos dejar las cosas así.

analíticas que determinan clases por medio de un pasaje al cociente, por tanto, sobre la base a una relación de equivalencia (por ejemplo, la definición de Z a partir de N o de Q a partir de Z).
La percepción (pratyaska) es la relación entre objeto visible (es decir que cae bajo nuestros ojos) o de cualquier forma sensible (relación que surge del contacto de un objeto con algún órgano de los sentidos) y la imagen que tenemos del objeto. Dejando de lado las consideraciones relativas a los 6 sentidos que los filósofos nyaya reconocían en el hombre, recordamos la importancia que atribuían al sexto sentido, el intelecto (manas), a causa de la función de orden y de mediación que este "órgano" tiene, en relación con los otros cinco. Recordemos que los conceptos comunicables adquieren una realidad propia, en la filosofía nyaya, en contraposición con la pura imagen mental que le atribuían los budistas.
Y llegamos a la inferencia (anumana) que representa, en la escuela nyaya, el momento sublime.
No es muy conocido el llamado *silogismo* nyaya (lo llamaremos así tradicionalmente como se usa por su forma símil, en ciertos aspectos, o al menos en apariencia, con el silogismo aristotélico).
La nyaya distinguía en su silogismo cinco enunciados (y no tres como en el silogismo aristotélico):
(1) la afirmación (pratijna) (no demostrada: es el enunciado mismo que se quiere demostrar)
(2) la razón (hetu)
(3) la proposición general o enunciado (udaharana), seguida de un ejemplo
(4) la aplicación (upanaya), llamada también segunda afirmación
(5) la conclusión (nigamana).
El siguiente ejemplo es un clásico nyaya:
el objeto A se mueve (afirmación)
porque se le ha aplicado una fuerza (razón)
cada vez que se le aplica una fuerza a un objeto, este se mueve (proposición general); por ejemplo: si se amarran bueyes a una carreta, esta se mueve (ejemplo)
al objeto A se le aplicó una fuerza (aplicación)
por tanto
el objeto A se mueve (conclusión).
Es bastante fácil escribir en forma simbólica este razonamiento; lo hacemos como ejercicio.
Antes de proceder, introduzcamos un simbolismo oportuno; sean: A, B objetos dados, X un objeto genérico;
P(X): el enunciado predicativo abierto "X se mueve"
F(X): "a X se le aplicó una fuerza".
El enunciado abierto F(X) es verdadero cada vez que, en el lugar de la variable X, se sustituye una constante A, tal que F(A) es verificable experimentalmente (en el sentido que: la verdad cae bajo los seis sentidos; esta es, al menos, la interpretación empírica nyaya).
El silogismo nyaya se puede interpretar ahora formalmente como sigue:

Afirmación	1	P(A)	Afirmación (aún no probada)
Razón	2	F(A)	Causa que se atribuye para que P(A) ocurra
Tesis	3	$(\forall X)\ [F(X) \rightarrow P(X)]$ Por ejemplo:	Proposición general Por ejemplo:

		$F(B) \rightarrow P(B)$	$F(B) \rightarrow P(B)$
Aplicación	4	F(A)	Del caso general se vuelva al caso en examen: una fuerza ejerce una acción sobre A
Conclusión	5	P(A)	A se mueve

La clásica crítica budista rechaza el primero y el segundo momento, dado que estos no forman parte de un razonamiento verdadero y propio, sino que son englobados en una tesis.
Sin embargo, lo que deseo enfatizar es que esta aparente inútil pérdida de tiempo se hace generalmente en el razonamiento común, por ejemplo, en la acción didáctica: es decir, al inicio se evidencia lo que se desea demostrar al final; no se podría organizar *dicho* razonamiento de manera diferente. Sobre este punto volveré más adelante.
De todas formas, sin razón, los budistas rechazaron el quinto momento, en el cual se cumple una especie de *modus ponens* en el cálculo de los predicados, una operación lógicamente correcta y esencial al funcionamiento de este tipo de silogismo, que podríamos expresar formalmente como sigue:
$\{(\forall X)\ [(F(X) \rightarrow P(X)) \wedge F(X)] \ \rightarrow\ P(X)\} \ \rightarrow\ \{[(F(A) \rightarrow P(A)) \wedge F(A)] \ \rightarrow P(A)\}$
El análisis lógico del idioma, en relación con la estrecha conexión atribuida a la dicotomía lenguaje - pensamiento, lleva a los nyayas a definir una crítica exacta del lenguaje que se acerca a varios sistemas retóricos modernos.

Para los nyayas, son enemigos de la deducción correcta o del hablar correcto:
la ambigüedad (chala) que se realiza cada vez que un término viene usado inadecuadamente (en sustancia, se trata de un mal uso de la analogía);
la no conclusión (jati), discurso circular sin contenido;
los argumentos absurdos (nigrahastama); quien a estos recurre “no tiene lógica”; el destino de quien recurre a estos argumentos es el de ser dialécticamente vencido por quien opera con lógica y con argumentaciones racionales.
Los filósofos nyayas estudiaron después los casos en los cuales sus silogismos llevaban a sofismas; veamos los casos principales de esta deletérea reducción:
(1) inexacta correspondencia entre las diversas partes que constituyen el silogismo, por lo cual no hay relación entre los términos;
(2) absurdo intrínseco que aparece en un término que dice lo contrario de aquello que debería afirmar;
(3) absurdo explícito debido a la contraposición de dos términos del silogismo que se excluyen recíprocamente;
(4) la falta de demostración o de verificación de uno de los términos sobre los cuales se apoya el razonamiento;
(5) la falsedad del término mayor o la inexistencia del objeto en cuestión, o la atribución al objeto de falsas propiedades.
Sobre este último punto, se recuerda la posición de Aristóteles en relación con el conjunto vacío y la superación de dicha cuestión por parte de Gergonne (D’Amore, 2001, pp. 17-54).

De aquí se ve bien cómo la nyaya es diferente de la lógica aristotélica dado que se basa esencialmente sobre el control empírico, sobre el contacto con el mundo externo,[2] entendiendo por *mundo* no sólo el conjunto de las cosas y de los hechos sino también de los pensamientos, como si fueran entidades reales ("reales" no simplemente "existentes", para no pensar que se pueda hacer una comparación con el platonismo).
Necesitamos aquí recordar que nuestra actual distinción entre lógica de los enunciados y lógica de los predicados no hace justicia al efectivo desarrollo histórico de la disciplina; la lógica de los enunciados no es tan potentemente presente en la obra de Aristóteles como lo es hoy en cualquier tratado: esta deriva de los estudios de los filósofos Megáricos y Estoicos y, paradójicamente, se estableció más tarde, mientras la lógica de los predicados es esencialmente un medio para entender, desde un punto de vista moderno, la silogística de Aristóteles.
En el aula, en las lecciones de lógica en la escuela media superior (en Italia grados 9-13), se trata básicamente la lógica de los enunciados y se intenta aplicarla, como ejemplo, a las demostraciones sobre todo geométricas a las cuales no siempre, o no del todo, se adapta. Por ejemplo, en las demostraciones se necesita en muchas ocasiones cuantificar sobre las variables, aspecto que no tiene sentido en la lógica enunciativa.
Un análisis profundo de las formas de razonamiento y de sus modelizaciones lógicas por parte de expertos (matemáticos, docentes universitarios) y por parte de estudiantes (universitarios, a inicio de su formación profesional) fue hecha por Durand-Guerrier y Arsac (2003). Los autores muestran, entre otros aspectos, concepciones diversas del uso y de la necesidad de usar los cuantificadores en las demostraciones por parte de expertos y por parte del estudiante.
Llegamos al punto.
Muchos estudiantes de grados 9-11 (14-16 años) que demuestran teoremas (bueno: que *intentan* demostrar teoremas) lo hacen espontáneamente con esta forma demostrativa nyaya (D'Amore, 2005). El hecho de haber estudiado la lógica clásica de estilo aristotélico no ayuda para nada en el desarrollo de habilidades en la demostración.
En mía opinión solo un profesional matemático puede entender lo que está pasando en el aula; los otros se limitarían a decir que los estudiantes non saben demonstrar…

4. Área y perímetro

Los dos conceptos geométricos: *perímetro / área* de una figura plana, tienen muchos elementos en común sobre el plano científico, pero muchos otros son simplemente supuestos sobre el plano de las misconcepciones, comunes en los estudiantes (y no sólo) de todo nivel escolar.
Por ejemplo, la literatura ha demostrado ampliamente que gran número de estudiantes (y no sólo) está convencido que existe una relación de estrecha dependencia entre estos dos conceptos sobre el plano relacional, del tipo:
si A y B son dos figuras planas, entonces:

[2] Lo que no sólo no es contemplado, sino no del todo aceptado por la triunfante filosofía griega (Sócrates - Platón - Aristóteles) que, sobre este punto, en forma más o menos explícita, seguía rechazando la *doxa* a favor de la elección parmenidiana de la *aletheia*. Naturalmente, discursos aparte merecerían los intentos hechos por los Sofistas los cuales fueron doblegados por el triunfo de Aristóteles y de las (precedentes) argumentaciones dialógicas de Platón.

si (perímetro de A > perímetro de B) entonces (área de A > área de B)
ídem con <
ídem con = (por lo cual: dos figuras isoperimétricas son necesariamente equiextensas);
y viceversa, cambiando el orden "perímetro - área" con "área – perímetro".
Difícilmente este tema se propone didácticamente en forma explícita (según algunos docentes, por una supuesta dificultad).
Podemos pedirnos ahora si normalmente los docentes, sin importar el nivel escolar, tienen plena conciencia sobre el tema o si, por casualidad, también en algunos de ellos existen problemas de construcción conceptual.
Esta evidencia tiene que ver con el problema de las convicciones y de las concepciones de los docentes.
Un amplio cuadro teórico sobre este tema se puede encontrar en D'Amore y Fandiño Pinilla (2004); aquí nos limitaremos solo a pocas palabras:

- *convicción* (belief) (o creencia): opinión, conjunto de juicios/expectativas, lo que se piensa a propósito de algo;
- el conjunto de las convicciones que alguien (A) tiene sobre algo (T) son las *concepciones* (K) de A relativas a T; si A pertenece a un grupo social (S) y comparte con los otros miembros de S dicho conjunto de convicciones relativas a T, entonces K es la concepción de S relativa a T.

A veces, al puesto de "concepción de A relativa a T", se habla de "imagen que A tiene de T".
Juega además otro factor importante, evidenciado por Azhari (1998); trataremos de decirlo en forma breve: si existen dos relaciones ligadas mutuamente, el estudiante intenta aplicar la siguiente "ley de conservación":
si una determinada cosa crece, también esta otra, con la cual está relacionada, crece (y viceversa).
Ahora, el ejemplo que liga entre sí perímetro y área parece caer como anillo al dedo en las consideraciones de Azhair (es más, este es precisamente uno de los ejemplos ofrecidos en este trabajo, citado por Stavy y Tirosh, 2001).
Si ponemos en relación los perímetros de dos figuras A y B, con las respectivas áreas, nos parece que una forma convincente de evidenciar que las "leyes" enunciadas líneas arriba NO sean válidas, sea la de dar un ejemplo para cada uno de los siguientes 9 casos posibles:

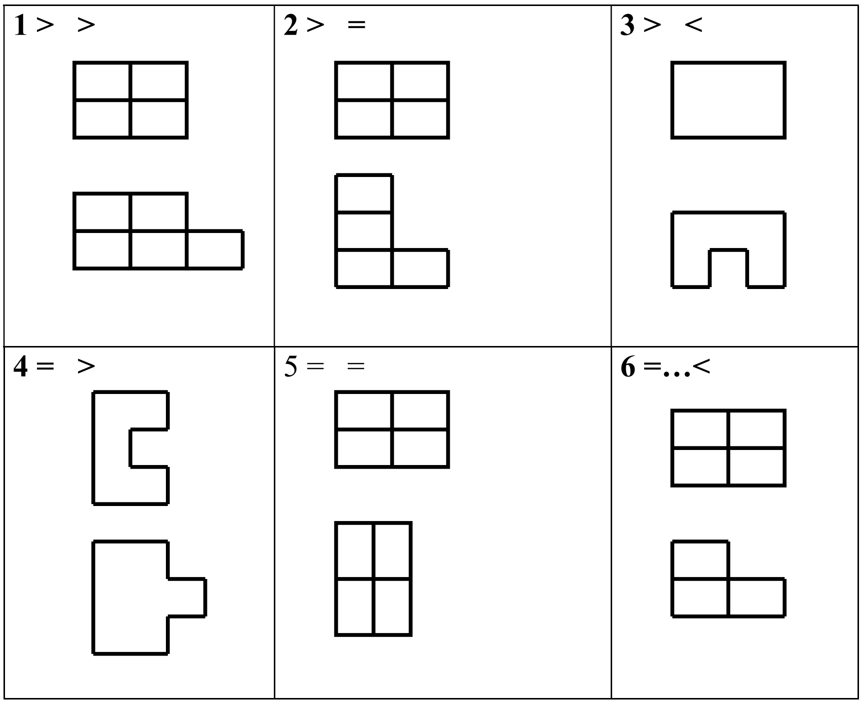
(p $=_{df}$ perímetro, A $=_{df}$ área)

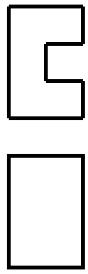
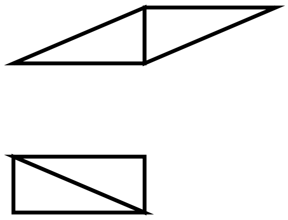
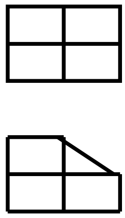
p	**A**	**p**	**A**	**p**	**A**
>	>	>	=	>	<
=	>	=	=	=	<
<	>	<	=	<	<

La primera casilla > > dice: encontrar dos figuras tales que, pasando de la primera a la segunda, el perímetro crezca y el área crezca;
y así sucesivamente.
Para evitar dificultades, se pide siempre partir de figuras simples, como por ejemplo de un rectángulo, siempre que sea posible, haciendo diversas transformaciones sobre este o sobre

figuras que se derivan de este. Consideramos necesario aclarar que las figuras sobre las cuales conviene trabajar son las más elementales posibles para evitar complicaciones que se deriven de la figura misma.
Más adelante en el texto se da un ejemplo de cada una de las 9 situaciones indicadas, con figuras elementales. Estos ejemplos no fueron mostrados a los sujetos involucrados en la prueba, que se describe a continuación; cada sujeto debía proporcionar los ejemplos oportunos, por lo menos en una primera instancia.
Preguntas, metodología de investigación e hipótesis de respuesta en Fandiño Pinilla y D'Amore (2007b, 2009).
Sujetos de la investigación:
1: investigadores universitarios; 2: docentes todo nivel; 3: docentes en formación.
Titulo mínimo: grado universitario en Matemática.
Preguntas iniciales:
¿Es verdad o no es verdad que se pueden encontrar ejemplos para todos los 9 casos? ¿Es verdad o no es verdad que surge espontáneo pensar que, en general, al aumentar el perímetro de una figura plana, aumenta también el área? ¿Es verdad o no es verdad que se necesita hacer un esfuerzo, para *convencerse* que las cosas NO son así?
En la siguiente tabla los 9 ejemplos anunciados:

p	**A**	**p**	**A**	**p**	**A**
>	>	>	=	>	<
=	>	=	=	=	<
<	>	<	=	<	<



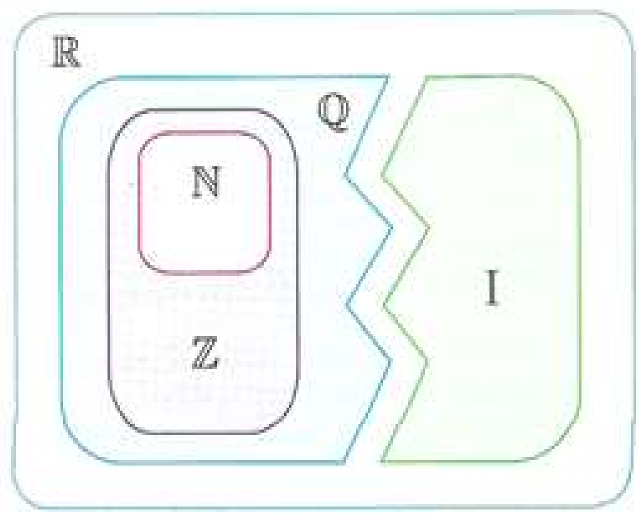
7 <...>	**8 <...=**	**9 < <**
		

Parece un tema sencillo, pero solo encontramos matemáticos profesionales que aceptaron todo esto con cierta seguridad.

5. Las representaciones semióticas de conjuntos infinitos

En libros de texto universitarios se encuentran generalmente algunas representaciones semióticas erradas; el siguiente caso es un ejemplo de esta afirmación.

$R=Q\cup I$



Es obvio que solo un matemático puede poner remedio a este tipo de cosas, de cierto no puede hacerlo un experto de otra disciplina.

6. Conclusiones

El objetivo de este texto es evidenciar el siguiente hecho: la Educación matemática debe ser dominio de estudio de matemáticos profesionales dado que los temas que afronta, los estudios que se revelan necesarios, las investigaciones que se requieren, *sin importar el nivel escolar*, pueden ser dominadas solo por quien tiene una fuerte competencia matemática, profunda,

entonces un profesional de la Matemática. En algunos países, de hecho, la Educación matemática es una rama de la Matemática y no está encuadrada en Pedagogía, Psicología o Ciencias de la Educación.
En Italia, por ejemplo, la Unione Matematica Italiana (UMI) tiene una sección dedicada a la investigación en Educación matemática como la tiene para Álgebra, Geometría, Topología, Lógica…
En el Ministerio Italiano de la Universidad y de la Investigación (MIUR) la Educación matemática hace parte del agrupamiento disciplinar MAT04, por tanto, hace parte plenamente de la Matemática.
Existen cursos de Educación matemática que se siguen DESPUÉS de obtener el título en Matemática, por ejemplo, en los cursos de Maestría o Doctorado en Educación matemática.
En el julio del 2006 se celebró en el Departamento de Matemática de la Universidad de Torino (Italia) un congreso internacional sobre "Matemática y sus aplicaciones", es decir un congreso de Matemática aplicada: Joint Meeting of UMI-SIMAI/SMAI-SMF: *Mathematics and its Applications*. La Educación matemática fue sido considerada "Matemática aplicada a las problemáticas del aprendizaje".
Entre otras, se presentó la conferencia:
D'Amore B. & Fandiño Pinilla M.I.: How the sense of mathematical objects changes when their semiotic representations undergo treatment and conversion. (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2007a).
Fueron publicadas las Actas en un número especial de la revista internacional *La matematica e la sua didattica* de la cual soy director desde su fundación, hace 28 años; el editor de ese número especial fue: Ferdinando Arzarello, quien hasta hace pocos años era el presidente del ICME (International Congress on Mathematical Education).
En continuación al tema de investigación presentado en Torino por nosotros, se realizaron varias publicaciones y tesis de doctorado de investigación, por ejemplo, en Italia (Giorgio Santi, en inglés) y en Colombia (Pedro Javier Rojas Garzón, en español); ambas tesis fueron aprobadas con el máximo de la calificación.

¿Cómo puede ser realizable todo esto si se piensa que la Educación matemática no es tarea de los investigadores matemáticos universitarios, sino de expertos de otras disciplinas?
Sin embargo, en muchos países se piensa que deba ser así, con un grave daño para nuestra compleja y delicada disciplina la cual requiere y exige una competencia matemática decididamente profunda.

Bibliografía

Arrigo, G. & D'Amore, B. (1992). *Infiniti*. Milano: Angeli ed.

Arrigo, G. & D'Amore, B. (1998). Epistemological and didactical obstacles to the process of comprehension of a theorem of Cantor that involves actual infinity. *Proceedings of the I Cerme of Osnabrük*, agosto 1998.

Arrigo, G. & D'Amore, B. (1999). "I see it but I don't believe it…". Epistemological and didactic obstacles to the process of comprehension of a theorem of Cantor that involves actual infinity. *Scientia Paedagogica Experimentalis* (Gand, Bélgica), *36*(1), 93-120

Arrigo, G. & D'Amore, B. (2004). Otros hallazgos sobre los obstáculos en la comprensión de algunos teoremas de Georg Cantor. *Educación Matemática* (México DF, México), *16*(2), 5-20.

Azhari, N. (1998). *Using the intuitive rule «Same of A, same of B» in conservation tasks*. Manuscrito no publicado, cit. en Stavy y Tirosh (2001).

Bagni, G. T. (2001). Infinito e infinitesimo potenziale ed attuale: una sfida per la Scuola Secondaria Superiore. *Bollettino dei Docenti di Matematica*, 42, 9–20.

Bourbaki, N. (1970). *Éléments de Mathématiques - Théorie des ensembles - E III*. París: Hermann.

Cavaillès, J. (1962). *Philosophie mathématique*. París: Hermann.

Courant, R. & Robbins, H. (1941), *What is mathematics*? New York: Oxford Univ. Press.

D'Amore, B. (2001). Considerazioni attorno alla logica di Gergonne. En: D'Amore. B. (2001). *Scritti di Epistemologia Matematica. 1980-2001*. Prólogo de Juan D. Godino. Bologna: Pitagora. Pp. 17-54.

D'Amore, B. (2005). Secondary school students' mathematical argumentation and Indian logic (nyaya). *For the learning of mathematics*, *25*(2), 26-32.

D'Amore, B. & Fandiño Pinilla, M. I. (2004). Cambi di convinzione in insegnanti di matematica di scuola secondaria superiore in formazione iniziale. *La matematica e la sua didattica*, *18*(3), 27-50.

D'Amore, B. & Fandiño Pinilla, M. I. (2007a). How the sense of mathematical objects changes when their semiotic representations undergo treatment and conversion. *La matematica e la sua didattica*. Vol. 21, n. 1, pp. 87-92. Actas del: Joint Meeting of UMI-SIMAI/SMAI-SMF: *Mathematics and its Applications*. Panel on Didactics of Mathematics. Dipartimento di Matematica, Università di Torino. 6 julio 2006. ISSN: 1120-9968.

D'Amore, B. & Fandiño Pinilla, M. I. (2007b). Relaciones entre área y perímetro: convicciones de maestros y de estudiantes. *Relime* (México DF), *10*(1), 39-68.

Durand-Guerrier, V. & Arsac, G. (2003). Méthodes de raisonnement et leur modélisations logiques. Spécificité de l'Analyse. Quelles implications didactiques? *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *23*(3), 295-342.

Fandiño Pinilla, M. I. & D'Amore. B. (2009). *Área y perímetro. Aspectos conceptuales y didácticos*. Prefacio de Carlos Vasco Uribe. Bogotá: Magisterio.

Noether, E. & Cavaillès, J. (Compiladores.) (1937). *Briefwechsel Cantor-Dedekind*. París: Hermann.

Stavy, R. & Tirosh, D. (2001). *Perché gli studenti fraintendono matematica e scienze?* Trento: Erickson.